МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

UDC 330.4:519.86

GENERALIZED CONTINUOUS LINEAR MODEL OF INTERNATIONAL TRADE

© 2014 **KOSTENKO E., KUZNICHENKO V. M., LAPSHYN V. I.**

UDC 330.4:519.86

Kostenko E., Kuznichenko V. M., Lapshyn V. I. Generalized continuous linear model of international trade

The probability-based approach to the linear model of international trade based on the theory of Markov processes with continuous time is analysed. A generalized continuous model of international trade is built, in which the transition of the system from state to state is described by linear differential equations. The methodology of how to obtain the intensity matrices, which are differential in nature, is shown, and the same is done for their corresponding transition matrices for processes of purchasing and selling. In the process of the creation of the continuous model, functions and operations of matrices were used in addition to the Laplace transform, which gave the analytical form of the transition matrices, and therefore the expressions for the state vectors of the system. The obtained expressions simplify analysis and calculations in comparison to other methods. The values of the continuous transition matrices include in themselves the results of discrete model of international trade at moments in time proportional to the time step. The continuous model improves the quality of planning and the effectiveness of control of international trade agreements.

Key words: *Markov chains, linear differential equations, z-transform, transform Laplace*
Formulae: *33.* ***Bibl.:*** *26.*

Kostenko Elena *– Chief Financial Officer, Manifest Communications Inc. (197 Spadina Avenue, Suite 500, Toronto, Canada)*
Email: *Elena_Kostenko@manifestcom.com*

Kuznichenko Volodymyr M. *– Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor, Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technology, Kharkov Institute of Finance Ukrainian State University of Finance and International Trade (prov. Pletnovskyy, bud. 5., Kharkov, 61003, Ukraine)*
Email: *kyznichenko_v_m@mail.ru*

Lapshyn Volodymyr I. *– Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Professor, Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technology, Kharkov Institute of Finance Ukrainian State University of Finance and International Trade (prov. Pletnovskyy, bud. 5., Kharkov, 61003, Ukraine)*
Email: *v.i.lapshyn@i.ua*

УДК 330.4:519.86

Костенко Е., Кузниченко В. М., Лапшин В. И. Обобщенная непрерывная модель международной торговли

Рассмотрен вероятностный подход к линейной модели международной торговли на базе теории марковских процессов с непрерывным временем. Построена обобщенная непрерывная линейная модель международной торговли, в которой переход системы из состояния в состояние описывается линейными дифференциальными уравнениями. Показана методика получения матриц интенсивностей, которые являются дифференциальными, и соответствующих им переходных матриц для процессов продаж и закупок. Для создания непрерывной модели использовались функции и операции от матриц, а также преобразование Лапласа, которое позволило найти аналитический вид для переходных матриц, а значит и выражения для векторов состояния системы. Полученные выражения упрощают анализ и расчет состояний системы по сравнению с другими методами. Значения непрерывных переходных матриц включают результаты дискретной модели международной торговли в моменты времени, равные кратности времени шага. Непрерывная модель улучшает качество планирования и эффективность контроля международных торговых отношений.

Ключевые слова: *цепи Маркова, линейные дифференциальные уравнения, z-преобразование, преобразование Лапласа*
Формул: *33.* ***Библ.:*** *26.*

Костенко Елена *– финансовый директор, Manifest Communications Inc. (197 Spadina Avenue, Suite 500, Торонто, Канада)*
Email: *Elena_Kostenko@manifestcom.com*

Кузниченко Владимир Михайлович *– кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, кафедра экономико-математических методов и информационных технологий, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли (пер. Плетневский, д. 5, Харьков, 61003, Украина)*

Email: *kyznichenko_v_m@mail.ru*

УДК 330.4:519.86

Костенко О., Кузніченко В. М., Лапшин В. І. Узагальнена безперервна лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянуто імовірнісний підхід до лінійної моделі міжнародної торгівлі на базі теорії марківських процесів із безперервним часом. Побудовано узагальнену безперервну лінійну модель міжнародної торгівлі, в якій перехід системи із стану в стан описується лінійними диференціальними рівняннями. Показано методику отримання матриць інтенсивностей, які є диференціальними, і перехідних матриць, що відповідають їм, для процесів продажів і закупівель. Для створення безперервної моделі використовувалися функції і операції від матриць, а також перетворення Лапласа, яке дозволило знайти аналітичний вид для перехідних матриць, а значить, і вираження для векторів стану системи. Отримані вирази спрощують аналіз і розрахунок станів системи порівняно з іншими методами. Значення безперервних перехідних матриць включають результати дискретної моделі міжнародної торгівлі в моменти часу, рівні кратності часу кроку. Безперервна модель покращує якість планування і ефективність контролю міжнародних торгових відносин.

Ключові слова: *ланцюги Маркова, лінійні диференціальні рівняння, z-перетворення, перетворення Лапласа*
Формул: *33.* ***Бібл.:*** *26.*

Костенко Олена *– фінансовий директор, Manifest Communications Inc. (197 Spadina Avenue, Suite 500, Торонто, Канада)*
Email: *Elena_Kostenko@manifestcom.com*

Кузніченко Володимир Михайлович *– кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент, кафедра економіко-математичних методів та інформаційних технологій, Харківський інститут фінансів Українського державного університету фінансів та міжнародної торгівлі (пров. Плетньовський, буд. 5., Харків, 61003, Україна)*
Email: *kyznichenko_v_m@mail.ru*

***Лапшин Владимир Ильич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, кафедра экономико-математических методов и информационных технологий, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли (пер. Плетневский, д. 5, Харьков, 61003, Украина)*

***Email:** v.i.lapshyn@i.ua*

***Лапшин Володимир Ілліч** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор, кафедра економіко-математичних методів та інформаційних технологій, Харківський інститут фінансів Українського державного університету фінансів та міжнародної торгівлі (пров. Плетньовський, буд. 5., Харків, 61003, Україна)*

***Email:** v.i.lapshyn@i.ua*

Formulation of the problem. One of the key elements of a country's international activity is its trade, which also has a significant impact on its external politics. Integration processes in the global economy are related to the creation of transnational corporations, euroregions and regional unifications [1, 2], which require good planning and constant control to facilitate interaction between partners. This, in turn, increases the organizational standards of international trade. For these reasons, the improvement of models of international trade is very important.

Many Ukrainian scientists such as О. Г. Белорус, А. С. Гальчинский, Д. Г. Лукъяненко, Ю. В. Магагон and А. С. Филипенко [3–10] have studied Ukraine's international trade – it's characteristic values, it's peculiarities and methods of its development. The studies over the last few years have shown the presence of a new step in the development of international trade relations in the post-crisis period. Data from 2010-2011 shows that the volume of world trade is on the rise. At the same time, the formation of an import structure is an important problem for Ukraine [11, 12]. In these analyses of foreign economic activity, significant attention is paid to transnational corporations and regional structures[1, 13, 14]. Their important role in the development of international trade is noted. A noteworthy characteristic is the fact that trade inside these regions is greater than its trade with the outside. The small effect that the euroregions have on the economy of Ukraine is explained by the small volumes of the investment projects, which are related to the large risks of their realizations. Studies of the characteristics of international trade relations, as well as the importance that their diversification has for Ukraine, are presented in articles [2, 15–18].

It is important to note the comparative lack of articles on economic-mathematical models of international trade. The application of international logistical systems to better control material fluxes is analysed in [19]. The discrete linear model of international trade, based on the Markov Chain Method, was presented and analysed in [20–22] (deficit-less model) and in [23] (generalized model, which includes both deficit-inclusive and deficit-less models).

Formulation of the problem. The goal of the current article is the creation of a generalized continuous linear model for international trade from a probability-based approach. This model will allow for the simultaneous analysis of operations, specifically the buying and selling of goods, conducted between the members of a multi-sided trade agreement. This will provide the means to plan and control the continuous commodity-money relationships between trade partners.

Results of analysis. In the Markov Chain theory, the transition of a system from one state to another is, for discrete and continuous processes, described by equations (1) and (2) respectively:

$$\bar{p}(n) = \bar{p}(0)L^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{p}(t) = \bar{p}(t)A, \tag{2}$$

Here $\bar{p}(n)$ is the vector of probability of states after *n* steps, and $\bar{p}(t)$ is the vector of probability of states at the moment *t*. The matrix *L* is a stochastic, ergodic transition matrix, in which the sum of the elements in a line is equal to one. The elements of the intensity matrix A define the intensities of the transitions between different states, and the diagonal elements are found from the condition that the sum of elements in each line of A is equal to zero. These matrices are called «differential matrices».

Let's apply the Laplace transform $(\bar{p}(t) \leftrightarrow P(s))$ to equation (2):

$$sP(s) - \bar{p}(0) = P(s)A$$

or

$$P(s)(sI - A) = \bar{p}(0), \tag{3}$$

where

$$P(s) = \int_0^\infty \bar{p}(t)e^{-st}dt,$$

and I is a unit matrix. From (3) it follows that:

$$P(s) = \bar{p}(0)(sI - A)^{-1}. \tag{4}$$

The matrix $(sI - A)^{-1}$ fully describes the behaviour of Markov processes with continuous time.

It is known that the solution of the system (2) with the initial conditions $\bar{p}(0)$ has the following form:

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(0)e^{At}, \tag{5}$$

Here, the matrix function e^{At} must be understood as an exponential power series

$$I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots,$$

which converges to e^{At}.

Comparing (1) and (5) for discrete and continuous Markov processes at $t = n$, we obtain the following equality:

$$e^A = L$$

or

$$A = \ln L \tag{6}$$

The transformation of matrix functions into polynomials is done with the help of the Cayley-Hamilton theorem, and is described in detail in [24, 25].

Let's show how to get the intensity A_1 and A_2, as well as their corresponding transition matrices H_1 and H_2 for continuous buying and selling processes in the simple case of three trade partners.

We will look at a discrete problem – the linear model of international trade, for which the stochastic ergodic transition matrices of a sales (L_1) and purchases (L_2) are defined in the following way (note that the processes of sales and purchases are considered to be unified) [23]:

$$L_1 = B_1 * B_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L_2 = B_2^T * B_1 = \begin{pmatrix} \frac{25}{48} & \frac{5}{24} & \frac{13}{48} \\ \frac{7}{48} & \frac{17}{24} & \frac{7}{48} \\ \frac{13}{48} & \frac{5}{24} & \frac{25}{48} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad B_2^T = \begin{pmatrix} \frac{55}{96} & \frac{3}{16} & \frac{23}{96} \\ \frac{1}{32} & \frac{15}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{23}{96} & \frac{3}{16} & \frac{55}{96} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Applying the z-transformation [26] to (1) for L_1 and L_2, we find the analytical form of the solution of the discrete problem:

$$\overline{p}_1(n) = \overline{p}_1(0)[\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}] \tag{9}$$

$$\overline{p}_2(n) = \overline{p}_2(0)[\begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24} \\ -\frac{7}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{7}{24} \\ \frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}] \tag{10}$$

Let's build the continuous model of this problem. To do this, let's first find the matrix A_1. The characteristic polynomial of the

$$\Delta_{L_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \lambda - \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4}) \tag{11}$$

All of the roots of the characteristic polynomial are simple. Because of this, the characteristic polynomial coincides with the minimal polynomial $\psi(\lambda) = \Delta_{L_1}(\lambda)$. The spectre of the matrix L_1 will be written as Λ_{L1}, and it is equal to the following:

$$\Lambda_{L_1} = \left\{\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1\right\} \tag{12}$$

The function $f(\lambda) = \ln(\lambda)$ is defined on the spectrum of the matrix L_1. If the function $f(\lambda)$ is defined on the spectrum of the matrix and $g(\lambda)$ is any polynomial that coincides with $f(\lambda)$ on the spectrum of the matrix L_1 (as in, $f(\Lambda_{L_1}) = g(\Lambda_{L_1})$), then by definition

$$f(L_1) = g(L_1) \tag{13}$$

This polynomial can be obtained in several ways. In our case, the lowest-order polynomial $g(\lambda)$ defined on the spectrum of the matrix L_1, will have the following form: $g(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Let's compose the system of linear algebraic equations:

$$\begin{cases} g(1) = f(1) = 0 = a + b + c \\ g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \\ g(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \ln(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c \end{cases} \tag{14}$$

The solution of (14) has the following form: a = 8/3*ln(1/2), b = -6*ln(1/2), c = 10/3*ln(1/2).

Knowing $a,b,c,$ we find

$$A_1=\ln(L_1)=(\frac{8}{3}L_1^2-6L_1+\frac{10}{3}I)\ln(\frac{1}{2})=\ln(2)\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}. \quad (15)$$

Let's apply the Laplace [26] transform to equation (5), thereby obtaining the matrix $sI\text{-}A_1$:

$$sI-A_1=\begin{pmatrix}s+\frac{5}{4}\ln 2 & -\frac{1}{2}\ln 2 & -\frac{3}{4}\ln 2\\ -\frac{1}{4}\ln 2 & s+\frac{1}{2}\ln 2 & -\frac{1}{4}\ln 2\\ -\frac{3}{4}\ln 2 & -\frac{1}{2}\ln 2 & s+\frac{5}{4}\ln 2\end{pmatrix}, \quad (16)$$

The inverse matrix $(sI-A_1)^{-1}$ has the following form:

$$(sI-A_1)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{s^2+\frac{7}{4}s\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)} & \frac{\frac{1}{2}s\ln 2+(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)} & \frac{\frac{3}{4}s\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)}\\ \frac{\frac{1}{4}s\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)} & \frac{s^2+\frac{5}{2}s\ln 2+(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)} & \frac{\frac{3}{4}s\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)}\\ \frac{\frac{3}{4}s\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)} & \frac{\frac{1}{2}s\ln 2+(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)} & \frac{s^2+\frac{7}{4}s\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}{s(s+\ln 2)(s+2\ln 2)}\end{pmatrix} \quad (17)$$

Simplifying it, we obtain

$$(sI-A_1)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+\ln 2)}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+2\ln 2)}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (18)$$

Let's assume that the matrix $H_1(t)$ is the inverse transformation of the matrix $(sI-A)^{-1}$. Then, the inverse transformation transforms the equation (4) into

$$\overline{p}_1(t)=\overline{p}_1(0)H_1(t) \quad (19)$$

Using the Laplace transform, we obtain

$$\overline{p}_1(t)=\overline{p}_1(0)[\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+e^{-t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}] \quad (20)$$

Comparing (5) with (20), we see that $H_1(t)$ defines the form of the matrix $e^{A_1 t}$:

$$H_1(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+e^{-t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (21)$$

When $t=n$, we obtain the following:

$$H_1(n)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+e^{-n\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+e^{-2n\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \tag{22}$$

Therefore, the expression (9) coincides with (20) when $t=n$. This points to the fact that the sales transition matrix $H_1(t)$ has been found. It is a component of the continuous model of international trade, and it includes in itself all of the values of the discrete model.

We will now obtain the second component of the continuous model – the matrix of intensity of transitions A_2 and the purchasing transition matrix $H_2(t)$.

First of all, let's find the characteristic polynomial of the matrix L_2:

$$\Delta_{L_2}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{8} & \lambda-\frac{3}{4} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-\frac{1}{4}) \tag{23}$$

All of the roots of the characteristic polynomial are simple, and thus the characteristic polynomial coincides with the minimal polynomial $\psi(\lambda)=\Delta_{L_2}(\lambda)$. The spectrum of the matrix L_2 will be written as Λ_{L2}, and it is equal to:

$$\Lambda_{L_2}=\left\{\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1\right\} \tag{24}$$

The function $f(\lambda)=\ln(\lambda)$ is defined on the spectrum of the matrix L_2. As with the matrix L_1, we have, by definition,

$$f(L_2)=g(L_2) \tag{25}$$

In our case, the lowest-order polynomial $g(\lambda)$ defined on the spectrum of the matrix L_2 will have the following form: $g(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$.

The system of linear algebraic equations for *a,b,c* coincides with (14), and their values are a = 8/3*ln(1/2), b = -6*ln(1/2), c = 10/3*ln(1/2).

In the analysed case, the matrix A_2 has the following form:

$$A_2=\ln(L_2)=(\frac{8}{3}L_2{}^2-6L_2+\frac{10}{3}I)\ln(\frac{1}{2})=\ln(2)\begin{pmatrix}-\frac{29}{24} & \frac{5}{12} & \frac{19}{24}\\ \frac{7}{24} & -\frac{7}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{19}{24} & \frac{5}{12} & -\frac{29}{24}\end{pmatrix} \tag{26}$$

Let's apply the Laplace transform to equation (5) and obtain the matrices $sI\text{-}A_2$ and $(sI\text{-}A_2)^{-1}$:

$$sI-A_2=\begin{pmatrix}s+\frac{29}{24}\ln2 & -\frac{5}{12}\ln2 & -\frac{19}{24}\ln2\\ -\frac{7}{24}\ln2 & s+\frac{7}{12}\ln2 & -\frac{7}{24}\ln2\\ -\frac{7}{24}\ln2 & -\frac{5}{12}\ln2 & s+\frac{29}{24}\ln2\end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$(sI-A_2)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\begin{vmatrix}s+\frac{7}{12}\ln2 & -\frac{7}{24}\ln2\\ -\frac{5}{12}\ln2 & s+\frac{29}{24}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)} & -\frac{\begin{vmatrix}-\frac{7}{24}\ln2 & -\frac{7}{24}\ln2\\ -\frac{19}{24}\ln2 & s+\frac{29}{24}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)} & \frac{\begin{vmatrix}-\frac{7}{24}\ln2 & s+\frac{7}{12}\ln2\\ -\frac{19}{24}\ln2 & -\frac{5}{12}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)}\\ -\frac{\begin{vmatrix}-\frac{5}{12}\ln2 & -\frac{19}{24}\ln2\\ -\frac{5}{12}\ln2 & s+\frac{29}{24}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)} & \frac{\begin{vmatrix}s+\frac{29}{24}\ln2 & -\frac{19}{24}\ln2\\ -\frac{7}{24}\ln2 & s+\frac{29}{24}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)} & -\frac{\begin{vmatrix}s+\frac{29}{24}\ln2 & -\frac{5}{12}\ln2\\ -\frac{7}{24}\ln2 & -\frac{5}{12}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)}\\ \frac{\begin{vmatrix}-\frac{5}{12}\ln2 & -\frac{19}{24}\ln2\\ s+\frac{7}{12}\ln2 & -\frac{7}{24}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)} & -\frac{\begin{vmatrix}s+\frac{29}{24}\ln2 & -\frac{19}{24}\ln2\\ -\frac{7}{24}\ln2 & -\frac{7}{24}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)} & \frac{\begin{vmatrix}s+\frac{29}{24}\ln2 & -\frac{5}{12}\ln2\\ -\frac{7}{24}\ln2 & s+\frac{7}{12}\ln2\end{vmatrix}}{s(s+\ln2)(s+2\ln2)}\end{pmatrix}^T \tag{28}$$

Simplifying it, we obtain

$$(sI-A_2)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+\ln 2)}\begin{pmatrix}\frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\\ -\frac{7}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{7}{24}\\ \frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+2\ln 2)}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (29)$$

Let's assume that the matrix $H_2(t)$ is the inverse transformation of the matrix $(sI-A_2)^{-1}$. Then, the inverse transformation transforms the equation (4) into

$$\overline{p}_2(t)=\overline{p}_2(0)H_2(t) \quad (30)$$

Using the Laplace transform, we obtain

$$\overline{p}_2(t)=\overline{p}_2(0)[\begin{pmatrix}\frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\end{pmatrix}+e^{-t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\\ -\frac{7}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{7}{24}\\ \frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\end{pmatrix}+e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}] \quad (31)$$

Comparing (5) with (31), we see that $H_2(t)$ defines the form of the matrix $e^{A_2 t}$:

$$H_2(t)=\begin{pmatrix}\frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\end{pmatrix}+e^{-t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\\ -\frac{7}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{7}{24}\\ \frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\end{pmatrix}+e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (32)$$

When $t=n$, we obtain the following from (32):

$$H_2(n)=\begin{pmatrix}\frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24}\end{pmatrix}+e^{-n\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\\ -\frac{7}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{7}{24}\\ \frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{24}\end{pmatrix}+e^{-2n\ln 2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}= \quad (33)$$

Therefore, the expression (9) coincides with (20) when $t=n$. This points to the fact that the sales transition matrix H_1(t) has been found. It is a component of the continuous model of international trade, and it includes in itself all of the values of the discrete model.

From (33) it follows that the formulas (10) and (32) coincide at $t=n$. This points to the fact that the purchase transition matrix has been found. It is a component of the continuous model of international trade, and it includes in itself all of the values of the discrete model.

Conclusions. The generalized continuous linear model of linear trade has been built. It allows us to simultaneously analyse operations, specifically the buying and selling of goods, conducted between the members of a multi-sided trade agreement. It also allows us to obtain the balance in their trade relations. The method of derivation of the intensity matrices and their corresponding transition matrices for the buying and selling processes was shown. The values of the continuous transition matrices include all of the results of the discrete model of international trade at the moments of time proportional to the time step. The continuous model improves the quality of planning and the effectiveness of control in international trade relations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кальченко Т. В. Глобальний етап розвитку міжнародної торгівлі: якісні характеристики та закономірності / Т. В. Кальченко // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2012. – № 2. – С. 23 – 27.

2. Панкратова Е. Н. Создание еврорегионов как процесс международной экономической интеграции / Е. Н. Панкратова, Л. В. Ечина // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2011. – № 5. – С. 11 – 16.

3. Белорус О. Г. Глобализация и безопасность развития : монография / О. Г. Белорус, Д. Г. Лукьяненко и др. – К. : КНЕУ, 2002. – 789 с.

4. Білорус О. Г. Глобальні трансформації торгівлі : монографія / О. Г. Білорус, В. І. Власов. – К. : ННЦІАЕ, 2008. – 228 с.

5. Гальчинський А. С. Глобальні трансформації: концептуальні альтернативи, методологічні аспекти / А. С. Гальчинський. – К. : Либідь, 2006. – 312 с.

6. Стратегія економічного розвитку в умовах глобалізації : монографія / [За ред. д.е.н., проф. Д. Г. Лук'яненко]. – К. : КНЕУ, 2001. – 482 с.

7. Макогон Ю. В. Майбутнє України: стратегія поступу : монографія / Ю. В. Макогон, І. О. Амоша та ін. – Донецьк : НАН України; Академія економічних наук України, 2008. – 304 с.

8. Макогон Ю. В. Международная экономическая деятельность Украины / [под общ. ред. Ю. В. Макогон]. – Донецк : ДонНУ, 2009. – 570 с.

9. Філіпенко А. С. Глобальні форми економічного розвитку: історія і сучасність / А. С. Філіпенко. – К. : Знання, 2007. – 670 с.

10. Філіпенко А. С. Міжнародні економічні відносини: теорія : підручник / А. С. Філіпенко. – К. : Либідь, 2008. – 408 с.

11. Ковалевський Л. Г. Світова торгівля товарами та послугами у посткризовий період / Л. Г. Ковалевський // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2012. – № 1. – С. 71 – 74.

12. Туринська Ю. В. Проблеми формування товарної структури імпорту в Україні за умов посткризового розвитку / Ю. М. Туринська // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2012. – № 1. – С. 94 – 101.

13. Рябець Н. М. Роль ТНК країн, що розвиваються, в умовах посилення диспропорції економічного розвитку країн / Н. М. Рябець // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2010. – № 2. – С. 39 – 45.

14. Іващук І. О. Міжнародна торгівля у вирішенні глобальних проблем економічного розвитку країн / І. О. Іващук // Наукові записки НУ «Острозька академія». – 2011. – Вип. 16. – С. 350 – 359.

15. Горянська Т. В. Сучасні тенденції розвитку міжнародних торгівельно-економічних відносин / Т. В. Горянська // Економічний вісник Донбасу. – 2011. – № 1 (23). – С. 51 – 58.

16. Ключевська А. Зовнішньоторгівельні відносини України в контексті вибору її інтеграційного вектора / А. Ключевська // Збірник наукових праць. Дослідження міжнародної економіки. – 2011. – № 2 (67). – С. 185 – 192.

17. Мовчан В. М. Багатовимірність зовнішньоекономічної політики як стратегічний вибір України / В. М. Мовчан, К. І. Куценко // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2010. – № 3. – С. 10 – 16.

18. Олефір В. К. Оцінка відкритості економіки України / В. К. Олефір // Економічний вісник НТУ «КПІ». – 2012 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http: // economy.kpi.ua/

19. Майорова І. М. Інноваційні підходи розвитку логістичної інфраструктури системи міжнародної торгівлі / І. М. Майорова // Теоретичні і практичні аспекти економіки та інтелектуальної власності. – 2011. – Т. 2. – С. 33 – 38.

20. Кузниченко В. М. Энтропия состояний цепей Маркова в линейной модели международной торговли / В. М. Кузниченко // Вісник НТУ «ХПІ» : збірник наукових праць. Тематичний випуск : Технічний прогрес і ефективність виробництва. – 2010. – № 58. – С. 14 – 20.

21. Кузниченко В. М. Вероятностный подход к описанию линейной модели международной торговли / В. М. Кузниченко, В. И. Лапшин // Бизнес Информ. – 2010. – № 2. – С. 62 – 65.

22. Лапшин В. І. Динамічні характеристики лінійної моделі міжнародної торгівлі / В. І. Лапшин, В. М. Кузніченко, В. М. Головій // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2010. – № 6. – С. 10 – 14.

23. Лапшин В. І. Лінійна модель міжнародної торгівлі з дефіцитом торгівельного балансу / В. І. Лапшин, В. М. Кузніченко // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2011. – № 1. – С. 32 – 36.

24. Гандмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гандмахер. – 4-е изд. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

25. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, 1979. – 400 с.

26. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы / Р. А. Ховард. – М.: Советское радио, 1964. – 195 с.

REFERENCES

Belorus, O. G., and Lukianenko, D. G. *Globalizatsiia i bezopasnost razvitiia* [Globalization and security development]. Kyiv: KNEU, 2002.

Bilorus, O. H., and Vlasov, V. I. *Hlobalni transformatsii torhivli* [Global Transformations trade]. Kyiv: NNTsIAE, 2008.

Filipenko, A. S. *Hlobalni formy ekonomichnoho rozvytku: istoriia i suchasnist* [Global forms of economic development: history and modernity]. Kyiv: Znannia, 2007.

Filipenko, A. S. *Mizhnarodni ekonomichni vidnosyny: teoriia* [International Economic Relations : Theory]. Kyiv: Lybid, 2008.

Gandmakher, F. R. *Teoriia matrits* [Theory of Matrices]. Moscow: Nauka, 1988.

Horianska, T. V. "Suchasni tendentsii rozvytku mizhnarodnykh torhivelno-ekonomichnykh vidnosyn" [Modern trends in international trade and economic relations]. *Ekonomichnyi visnyk Donbasu*, no. 1 (23) (2011): 51-58.

Halchynskyi, A. S. *Hlobalni transformatsii: kontseptualni alternatyvy, metodolohichni aspekty* [Global Transformations : conceptual alternative methodological aspects]. Kyiv: Lybid, 2006.

Ivashchuk, I. O. "Mizhnarodna torhivlia u vyrishenni hlobalnykh problem ekonomichnoho rozvytku krain" [International trade in addressing global issues of economic development]. *Naukovi zapysky NU «Ostrozka akademiia»*, no. 16 (2011): 350-359.

Kalchenko, T. V. "Hlobalnyi etap rozvytku mizhnarodnoi torhivli: iakisni kharakterystyky ta zakonomirnosti" [Global stage of development of international trade: quality characteristics and patterns]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 2 (2012): 23-27.

Kovalevskyi, L. H. "Svitova torhivlia tovaramy ta posluhamy u postkryzovyi period" [World trade in goods and services in the post-crisis period]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 1 (2012): 71-74.

Kliuchevska, A. "Zovnishnyotorhivelni vidnosyny Ukrainy v konteksti vyboru ii intehratsiinoho vektora" [Foreign relations of Ukraine in the context of the choice of the integration vector]. *Zbirnyk naukovykh prats. Doslidzhennia mizhnarodnoi ekonomiky*, no. 2 (67) (2011): 185-192.

Kuznychenko, V. M. "Entropyia sostoianyi tsepei Markova v lyneinoi modely mezhdunarodnoi torhovly" [Entropy Markov chain in the linear model of international trade]. *Visnyk NTU «KhPI»*, no. 58 (2010): 14-20.

Kuznichenko, V. M., and Lapshin, V. I. "Veroiatnostnyy podkhod k opisaniiu lineynoy modeli mezhdunarodnoy torgovli" [A probabilistic approach to the description of the linear model of international trade]. *Biznes Inform*, no. 2 (2010): 62-65.

Khovard, R. A. *Dinamicheskoe programmirovanie i markovskie protsessy* [Dynamic Programming and Markov Processes]. Moscow: Sovetskoe radio, 1964.

Lapshyn, V. I., Kuznichenko, V. M., and Holovii, V. M. "Dynamichni kharakterystyky liniinoi modeli mizhnarodnoi torhivli" [Dynamic characteristics of the linear model of international trade]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 6 (2010): 10-14.

Lapshyn, V. I., and Kuznichenko, V. M. "Liniina model mizhnarodnoi torhivli z defitsytom torhivelnoho balansu" [The linear model of international trade with the trade deficit]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 1 (2011): 32-36.

Movchan, V. M., and Kutsenko, K. I. "Bahatovymirnist zovnishnnoekonomichnoi polityky iak stratehichnyi vybir Ukrainy" [The multidimensional zovnishnnoekonomichnoyi policy as a strategic choice of Ukraine]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 3 (2010): 10-16.

Maiorova, I. M. "Innovatsiini pidkhody rozvytku lohistychnoi infrastruktury systemy mizhnarodnoi torhivli" [Innovative approaches to the development of logistics infrastructure of international trade]. *Teoretychni i praktychni aspekty ekonomiky ta intelektualnoi vlasnosti* vol. 2 (2011): 33-38.

Makohon, Yu. V., and Amosha, I. O. *Maibutnie Ukrainy: stratehiia postupu* [Ukraine's Future: strategy development]. Donetsk: NAN Ukrainy; Akademiia ekonomichnykh nauk Ukrainy, 2008.

Maltsev, A. I. *Osnovy lineynoy algebry* [Fundamentals of linear algebra]. Moscow: Nauka, 1979.

Makogon, Yu. V. *Mezhdunarodnaia ekonomicheskaia deiatelnost Ukrainy* [International economic activity of Ukraine]. Donetsk: DonNU, 2009.

Olefir, V. K. "Otsinka vidkrytosti ekonomiky Ukrainy" [Evaluation of openness of the economy of Ukraine]. http://economy.kpi.ua/

Pankratova, E. N., and Echyna, L. V. "Sozdanye evrorehyonov kak protsess mezhdunarodnoi ekonomycheskoi yntehratsyy" [Create Euroregion as a process of international economic integration]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 5 (2011): 11-16.

Riabets, N. M. "Rol TNK krain, shcho rozvyvaiutsia, v umovakh posylennia dysproportsii ekonomichnoho rozvytku krain" [The role of TNCs in developing countries, in terms of strengthening the imbalance of economic development]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 2 (2010): 39-45.

Stratehiia ekonomichnoho rozvytku v umovakh hlobalizatsii [Economic development strategies in a globalizing world]. Kyiv: KNEU, 2001.

Turynska, Yu. V. "Problemy formuvannia tovarnoi struktury importu v Ukraini za umov postkryzovoho rozvytku" [Problems of the commodity structure of imports to Ukraine under conditions of post-crisis development]. *Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo*, no. 1 (2012): 94-101.