

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.4:338.24:519.86

Костенко Е., Кузниченко В. М., Лапшин В. И.

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРОВ НА СТАБИЛЬНОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проведено исследование влияния периодического воздействия на экономические системы. Показана опасность резонансного случая, когда частота внешнего периодического воздействия на систему приближается к ее собственной частоте колебаний около состояния равновесия. В этом случае амплитуда колебаний системы становится пропорциональной времени и возрастает вместе с ним. Учет воздействий, пропорциональных скорости смещения от состояния равновесия, приводит к ограничению роста амплитуды колебаний, снимая секулярную зависимость. Учет действий, пропорциональных нелинейным смещениям от точки равновесия, указывает на возможность вывода системы из резонанса. Квадратичная нелинейность не влияет на изменения амплитуды и фазы колебаний, а кубическая нелинейность через амплитуду изменяет фазу колебаний, что выводит систему из резонанса. В зависимости от параметров системы, возможен случай скачкового изменения амплитуды при изменении разности между собственной частотой системы и частотой периодического воздействия, причем система при этом переходит в стабильное состояние. Предложена методика обработки данных мониторинга для качественного анализа динамики экономических систем.

*Ключевые слова:* экономические системы, колебания, состояние равновесия, периодическое воздействие, нелинейность

*Рис.:* 3. *Формул:* 23. *Библ.:* 28.

**Костенко Елена** – финансовый директор, Manifest Communications Inc. (197 Spadina Avenue, Suite 500, Торонто, Канада)

*Email:* Elena\_Kostenko@manifestcom.com

**Кузниченко Владимир Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, кафедра экономико-математических методов и информационных технологий, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли (пер. Плетневский, д. 5, Харьков, 61003, Украина)

*Email:* kuznichenko\_v\_m@mail.ru

**Лапшин Владимир Ильич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, кафедра экономико-математических методов и информационных технологий, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли (пер. Плетневский, д. 5, Харьков, 61003, Украина)

*Email:* v.i.lapshyn@i.ua

УДК 330.4:338.24:519.86

Костенко О., Кузніченко В. М., Лапшин В. І.

## ВПЛИВ ЗОВНІШНІХ ПЕРІОДИЧНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ФАКТОРІВ НА СТАБІЛЬНІСТЬ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Проведено дослідження впливу періодичної дії на економічні системи. Показано небезпеку резонансного випадку, коли частота зовнішньої періодичної дії на систему наближається до її власної частоти коливань біля стану рівноваги. В цьому випадку амплітуда коливань системи стає пропорційною часу і зростає разом з ним. Урахування дій, пропорційних швидкості зміщення від стану рівноваги, приводить до обмеження зростання амплітуди коливань при зніманні секулярної залежності. Урахування дій, пропорційних нелінійним зміщенням від точки рівноваги, вказує на можливість виводу системи з резонансу. Квадратична нелінійність не впливає на зміну амплітуди і фази коливань, а кубічна нелінійність через амплітуду змінює фазу коливань, що виводить систему з резонансу. В залежності від параметрів системи, є можливою стрибова зміна амплітуди при зміні різниці між власною частотою системи і частотою періодичної дії, до того ж система при цьому переходить у стабільний стан. Запропоновано методику обробки даних моніторингу для якісного аналізу динаміки економічних систем.

*Ключові слова:* економічні системи, коливання, стан рівноваги, періодичні дії, нелінійність

*Рис.:* 3. *Формул:* 23. *Библ.:* 28.

**Костенко Елена** – финансовый директор, Manifest Communications Inc. (197 Spadina Avenue, Suite 500, Торонто, Канада)

*Email:* Elena\_Kostenko@manifestcom.com

**Кузніченко Володимир Михайлович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент, кафедра економіко-математичних методів та інформаційних технологій, Харківський інститут фінансів Українського державного університету фінансів та міжнародної торгівлі (пров. Плетньовський, буд. 5., Харків, 61003, Україна)

*Email:* kuznichenko\_v\_m@mail.ru

**Лапшин Володимир Ілліч** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор, кафедра економіко-математичних методів та інформаційних технологій, Харківський інститут фінансів Українського державного університету фінансів та міжнародної торгівлі (пров. Плетньовський, буд. 5., Харків, 61003, Україна)

*Email:* v.i.lapshyn@i.ua

Kostenko E., Kuznichenko V. M., Lapshyn V. I.

## INFLUENCE OF EXTERNAL PERIODIC AND NON-LINEAR FACTORS UPON STABILITY OF ECONOMIC SYSTEMS

The article conducts a study of influence of periodic effect upon economic systems. It shows a danger of the resonance case when frequency of external periodic effect on the system tends to its own frequency of vibrations near the state of equilibrium. In this case, the amplitude of vibrations of the system becomes proportional to time and grows with it. Account of impacts, proportional to the rate of shift from the state of equilibrium, results in limitation of growth of the amplitude of vibrations, taking away secular dependence. Account of actions, proportional to non-linear shifts from the point of equilibrium, points out a possibility of taking the system out of the resonance. Quadratic non-linearity has no influence upon changes of the amplitude and vibration phase and cubic non-linearity changes the vibration phase through the amplitude, which takes the system out of the resonance. Depending on the system parameters, the case of a sudden change of the amplitude during the change of difference between the own frequency of the system and frequency of periodic effect is possible, moreover, the system passes to a stable state. The article offers methods of treating monitoring data for qualitative analysis of dynamics of economic systems.

*Key words:* economic system, vibrations, state of equilibrium, periodic effect, non-linearity

*Pic.:* 3. *Formulae:* 23. *Bibl.:* 28.

**Kostenko Elena** – Chief Financial Officer, Manifest Communications Inc. (197 Spadina Avenue, Suite 500, Toronto, Canada)

*Email:* Elena\_Kostenko@manifestcom.com

**Kuznichenko Vladimir M.** – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor, Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technology, Kharkov Institute of Finance Ukrainian State University of Finance and International Trade (prov. Pletnovskyy, bud. 5., Kharkov, 61003, Ukraine)

*Email:* kyznichenko\_v\_m@mail.ru

**Lapshyn Vladimir I.** – Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Professor, Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technology, Kharkov Institute of Finance Ukrainian State University of Finance and International Trade (prov. Pletnovskyy, bud. 5., Kharkov, 61003, Ukraine)

*Email:* v.i.lapshyn@i.ua

**Постановка проблемы.** Мировые глобализационные процессы оказывают существенное влияние на экономики всех стран, особенно развивающихся, к которым можно отнести Украину в условиях формирования рыночной хозяйственной деятельности. Функционирование рыночной экономики в целом, как и любой экономической системы, сопровождается чередованием экономического роста и снижения, увеличения и уменьшения объемов производства. Такие периодические изменения свидетельствуют о цикличности развития экономики, что выражается в колебаниях рыночной конъюнктуры, отклонениях экономических параметров от состояний равновесия, приводящих после роста к кризисным явлениям. Ведущие экономисты мира видели причины возникновения экономических кризисов, а значит и экономических циклов, в несбалансированности спроса и предложения денег, манипулировании экономическим спросом со стороны государства, приводящее к нарушению рыночного механизма саморегулирования экономики, равновесия в экономической системе, в увеличении государственных расходов, экспансии и стимулировании банковского кредита, динамике денежной массы, разрыве в динамике инвестиций и сбережений. Таким образом, причиной экономических циклов являются изменения совокупных спроса и предложения [1–5].

Изменения экономических параметров систем, таких как рынки рабочей силы, товаров, денег, промышленные отрасли, предприятия и так далее, приводят к их колебаниям около состояний равновесия, которые определяются пересечением соответствующих зависимостей спроса и предложения.

Внешние и внутренние действия на системы могут привести к дестабилизации их состояний, то есть к росту

отклонений от положений равновесия. Поэтому изучение действий, их проявлений и признаков, которые влияют на изменения состояний экономических систем, является актуальным.

**Анализ последних исследований и публикаций.**

Исследованию природы и типов экономических кризисов, происходящего сейчас финансового кризиса и путей его преодоления посвящены работы многих ученых [1–7]. Отметим, что кризисы являются частью циклических процессов. Изучение признаков и механизмов действий экономических и макроэкономических шоков на развитие экономики проведено в работе [8]. Шоковое влияние можно сравнить с взрывными (резонансными) процессами в теории колебаний. В работе [9] определено, что резкие колебания рынка труда возникают в результате циклических перерывов в производстве, отставании спроса на рабочую силу от предложения, что может привести не только к существенным нарушениям в воспроизводстве рабочей силы, а и к значительным взрывам в системе. Анализ колебаний рынка труда и перспективы его развития рассмотрены в работе [10]. В работе [11] обсуждается возможность применения методов и результатов теории колебаний, которая успешно используется в различных областях физики, к экономическим процессам. Циклические колебания ВВП, экспорта и импорта, потребительских и инвестиционных расходов, производительности труда и реальной зарплаты, индекса потребительских цен в Украине проанализированы в работе [12]. Рынок труда, который является одной из важнейших компонент экономической системы и связан с циклическими колебаниями рыночной конъюнктуры, отражающимися в динамике и уровне безработицы, изучается в статье [13].

Динамические модели рыночной экономики были обобщены и представлены в трудах [1; 14–16]. В классической, кейнсианской, паутинообразной (cobweb) и монетаристской динамических моделях рассматриваются состояния равновесия рыночных систем, смещения от них без учета и анализа временных зависимостей. Модифицированная модель динамики капитала с учетом распределенных задержек во время реализации инвестиций представлена в работе [17], где проведен анализ обнаруженных циклических изменений в накоплении капитала и инвестиций.

Зарубежные ученые уделяют значительное внимание нелинейным процессам в экономике. В статье [18] показано, что рост безработицы и динамика доходов флуктуируют с различными частотами и их колебания могут быть даже аperiодичными. Нелинейностью характеризуются процессы изменения экономических параметров из-за неравенства доходов [19]. В работе [20] изучена возможность определения стационарных состояний в нелинейных экономических процессах при помощи использования определенных моделей. Нелинейное приближение неопределенных составляющих было применено в [21] для изучения неустойчивостей порогового типа, связанных с циклическими изменениями безработицы.

Исследования состояний равновесия экономических систем отечественными учеными в последнее время были проведены в работах [22–26], в которых изучались линейные и нелинейные колебания возле точек равновесия рынков труда, товаров, денег, предложены подходы для описания нелинейной динамики экономических систем, основанные на взаимосвязи фазовых и параметрических портретов экономических моделей и гамильтоновом формализме.

**Нерешенные вопросы проблемы.** В общем случае не было рассмотрено непосредственное влияние на экономические системы внешних периодических воздействий, которые могут приводить к существенным изменениям колебаний системы около состояний равновесия, например, к резонансным колебаниям.

**Целью** настоящей работы является исследование колебаний экономических систем около состояний равновесия при влиянии на них внешних периодических, пропорциональных скорости смещения и нелинейным смещениям от точек равновесия воздействий.

**Основные результаты исследования.** Рассмотрим равновесное состояние экономической системы в динамике. Такой экономической системой могут быть рынки труда, товаров и денег, экономическое состояние отрасли, предприятий, которые осциллируют во времени около своих состояний равновесия (пересечения зависимостей спроса и предложения соответствующих параметров систем).

Динамика системы около состояния равновесия определяется дифференциальным уравнением второго порядка относительно зависимостей функции смещения  $x$  от времени  $t$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \quad (1)$$

где  $f(x)$  – сумма всех сил, действующих на систему (величина, которая включает влияние внутренних и внешних экономических факторов на систему). Под термином «всех» будем понимать факторы, которые существенно влияют на состояние системы, то есть вносят существенные изменения в смещение системы от состояния равновесия.

При действии внутренних сил, то есть факторов, характеризующих состояние равновесной системы, из уравнения (1) получаем  $(f(x) = -\omega_0^2 x)$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Это уравнение описывает собственные колебания системы около состояния равновесия с частотой  $\omega_0$ , фазой  $\beta$  и амплитудой  $A$  при заданных начальных значениях отклонения и скорости смещения системы. Хорошо известное его решение имеет вид:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \beta). \quad (3)$$

При начальных условиях  $x(t=0) = x_0$  и  $\dot{x}(t=0) = v_0$  амплитуда  $A$  и фаза колебаний  $\beta$  определяются выражениями:

$$A = \left( x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2}, \quad \text{ctg} \beta = -\frac{x_0 \omega_0}{v_0}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда на систему, динамика которой описывается уравнением (2), начинает действовать внешнее периодическое влияние – сила  $F_0 \cos \omega t$ , где  $F_0$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешней периодической силы соответственно. Как будет показано, такие силы имеют деструктивный характер, потому что при определенных условиях приводят к дестабилизации системы. Такие действия могут применяться в конкурентной борьбе за рынок или для доведения конкурента до банкротства.

Уравнение (2) в этом случае переходит в уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t. \quad (5)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения состоит из суммы  $x = x_0 + x_1$  общего решения однородного уравнения (2) и частного решения неоднородного уравнения (5):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (6)$$

При начальных условиях  $x(t=0) = 0$  и  $\dot{x}(t=0) = 0$  решение (6) принимает вид:

$$x = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (7)$$

Когда  $\omega$  приближается к  $\omega_0$  ( $\omega \approx \omega_0$  – условие резонанса), частное решение уравнения (5) ищем в виде  $x_1 = t(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$ , где  $a$  и  $b$  – константы. Тогда при предыдущих начальных условиях общее решение уравнения (5) определяется выражением

$$x = \frac{F_0 t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (8)$$

К этому же результату можно прийти, если взять предел выражения (7) при стремящейся к нулю разности частот  $\omega_0 - \omega$ .

Таким образом, при резонансном условии  $\omega \approx \omega_0$  амплитуда колебаний системы растет во времени, что может привести к распаду стабильности экономической системы.

Дополнительная внешняя помощь в виде периодических воздействий – не изменит тенденцию. Стабильность системы можно обеспечить изменением внутренних параметров системы, то есть собственной частоты колебаний  $\omega_0$  за счет изменения внутренней силы, пропорциональной смещению, направленной на возврат системы в состояние равновесия. Например, в классической модели рыночной экономики при колебаниях рынка труда компании возвращают систему в состояние равновесия за счет увеличения или уменьшения относительной заработной платы (норма – час) работников в зависимости от того, что превышает спрос или предложение рабочей силы. На рынке денег, если спрос на деньги превышает предложение, денежная масса не успевает за увеличением товарной. Для возврата в равновесное состояние цены необходимо снижать. Когда спрос на деньги меньше предложения, то чрезмерную массу денег необходимо уменьшить за счет увеличения цен на товары. Такой же колебательный процесс происходит на рынке товаров. Компенсация неравенства спроса и предложения происходит за счет изменения процентной ставки, то есть количества денег на рынке. В кейнсианской модели колебание рынков происходит за счет выравнивания – взаимодействия валового внутреннего продукта и процентной ставки. При ускорении или замедлении этих процессов собственные частоты изменятся и системы выйдут из резонанса с внешним периодическим воздействием.

Другим фактором, который может изменить негативное влияние внешней периодической силы в случае резонанса, могут стать действия, пропорциональные скорости отклонения от точки равновесия  $dx/dt$ . При включении такой силы в уравнение (5) получаем уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t, \quad (9)$$

где величина  $\gamma > 0$  определяет затухание собственных колебаний системы и называется декрементом их затухания.

За собственные колебания системы отвечает решение однородного уравнения (9) (без правой части):

$$x_0 = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + B_1 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t), \quad \omega_0^2 > \gamma^2; \quad (10)$$

$$x_0 = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \quad \omega_0^2 < \gamma^2.$$

При  $\gamma > 0$  собственные колебания затухают и в общем решении уравнения (9) можно оставить только частное решение:

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t + \beta), \quad (11)$$

где

$$A^2 = \frac{F_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \quad \text{tg} \beta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12)$$

При  $\omega = \omega_0$  амплитуда колебаний достигает максимума

$$A^2 = \frac{F_0^2}{4\gamma^2\omega^2}, \quad (13)$$

но система будет находиться в стабильном состоянии.

Противодействие внешней периодической силе, которая приводит к секулярным (пропорциональным времени) решениям, могут оказать действия (силы), пропорциональные нелинейным смещениям от состояния равновесия [27; 28].

Рассмотрим динамическую экономическую систему, колебания которой представим в виде, близком к линейному автономному осциллятору, который описывается уравнением (2) с дополнительной правой частью, пропорциональной малому параметру  $0 < \varepsilon < 1$ . В резонансном случае  $\omega - \omega_0 = \omega - \omega_0 = \varepsilon\nu \ll \omega_0$  такая система описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \left( F_0 \cos \omega t + \alpha x^2 - \delta x^3 - 2\gamma \frac{dx}{dt} + 2\nu \omega x \right) = \varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right), \quad (14)$$

где  $\alpha, \delta, \nu$  – константы, которые определяются характеристиками изучаемой системы. В правую часть уравнения (14) входят периодическая сила с частотой  $\omega$ , диссипативная сила с декрементом затухания  $\gamma > 0$ , силы, пропорциональные квадратичной и кубической нелинейностям, а также линейным смещениям за счет разности собственной частоты  $\omega_0$  и частоты внешней периодической силы  $\omega$ .

Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$x(t) = A(t) \cos[\omega t + \beta(t)] = A \cos \varphi, \quad (15)$$

где  $A(t)$  и  $\beta(t)$  – величины, медленно изменяющиеся во времени.

С помощью метода Крылова-Боголюбова находим уравнения для  $A(t)$  и  $\beta(t)$ , которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) \sin \varphi, \\ \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{A\omega} f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Проведем усреднение этих уравнений по периоду колебаний  $T = 2\pi / \omega$ :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dA}{dt}} &= -\frac{2\pi}{\omega^3} \varepsilon \left( \frac{1}{2} F_0 \sin \beta + A\gamma\omega \right), \\ \overline{\frac{d\beta}{dt}} &= -\frac{2\pi}{A\omega^3} \varepsilon \left( \frac{1}{2} F_0 \cos \beta - \frac{3}{8} \delta A^3 + \nu\omega A \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Из уравнений следует, что квадратичная нелинейность не влияет на изменение амплитуды и фазы колебаний (отсутствуют слагаемые, пропорциональные  $A^2$ ). Фаза колебаний зависит от амплитуды, поэтому при изменении последней во времени изменяется через фазу частота колебаний и система выходит из резонансного состояния, что приводит к ограничению роста амплитуды.

Для установившихся значений амплитуды и фазы колебаний из уравнения (17) следует:

$$\gamma\omega A = -\frac{1}{2}F_0 \sin\beta, \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}\delta A^3 - \nu\omega A = \frac{1}{2}F_0 \cos\beta. \quad (19)$$

При возведении в квадрат и сложении этих уравнений получаем кубическое уравнение для  $A^2$ :

$$A^2 (\lambda_0 A^2 - \nu_0)^2 + A^2 = \frac{F_0^2}{4\omega^2 \gamma^2} = B, \quad (20)$$

где  $\lambda_0 = 3\delta / 8\gamma\omega$ ,  $\nu_0 = \nu / \gamma$ .

Зависимости  $A^2$  от  $\nu_0$  для некоторых параметров системы представлены на рис. 1–3 и демонстрируют характерное ее поведение в резонансном случае.

Из рис. 1–3 видно, что квадрат амплитуды системы может плавно изменяться в зависимости от расстройки частоты  $\nu$ , достигая локального максимума (рис. 1), а также совершать скачки (рис. 2, 3). В зависимости от параметров системы и изменения величины расстройки (увеличение или уменьшение) амплитуда колебаний может скачком возрастать или спадать.

При уменьшении  $\nu_0$  (рис. 2, точки 4,1 и рис. 3, точки 2,1) амплитуда скачком возрастает и уменьшается соответственно. При возрастании  $\nu_0$  (рис. 2, точки 2, 3 и рис. 3,

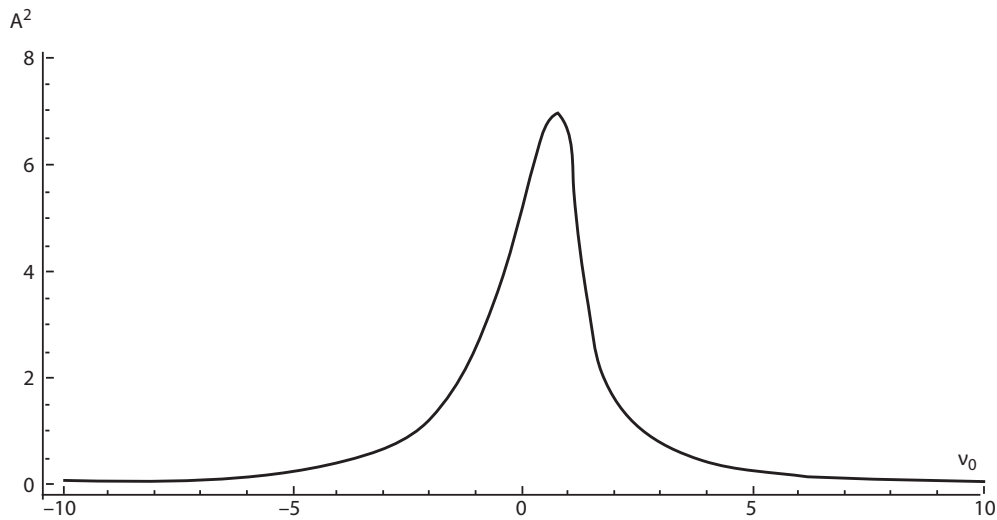


Рис. 1. Зависимость  $A^2$  от  $\nu_0$  при  $\lambda_0 = 0,01$  и  $B = 7$

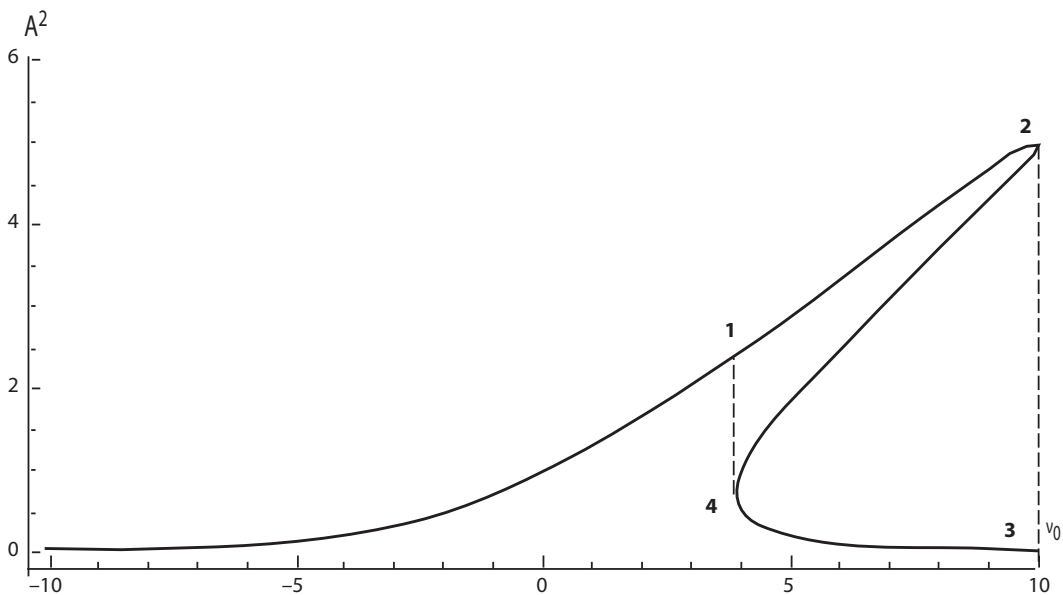


Рис. 2. Зависимость  $A^2$  от  $\nu_0$  при  $\lambda_0 = 2$  и  $B = 5$

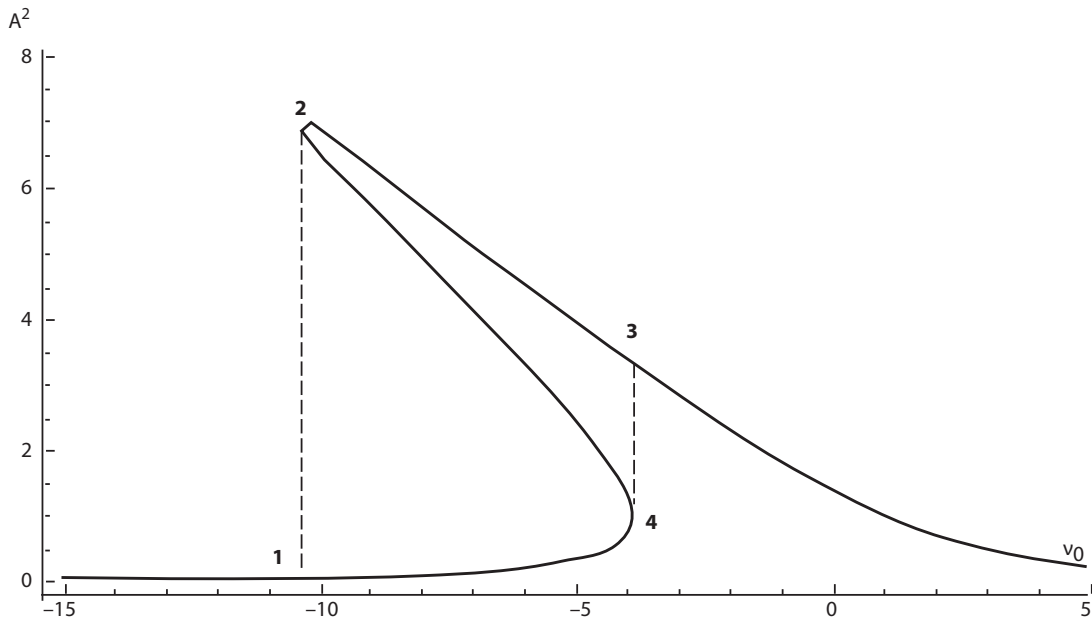


Рис. 3. Зависимость  $A^2$  от  $v_0$  при  $\lambda_0 = -1,5$  и  $B = 7$

точки 4, 3) амплитуда скачком падает и увеличивается соответственно. Отметим, что на участках 2–4 (рис. 2, 3) состояние системы неустойчиво.

Для качественного экспресс-анализа состояния системы предлагаем следующую модель, которая использует данные мониторинга по отклонениям экономических систем от состояний равновесий во времени.

Пусть зависимость отнормированных (выбор шкал по смещению  $x$  и времени  $t$ ) смещения  $x$  от времени  $t$  представлена набором пяти точек:

$$\{x, t\} = \{2, 1\}, \{-1.5, 2\}, \{2.7, 3\}, \{-3, 4\}, \{2, 5\}. \quad (21)$$

Используя комплекс программ Wolfram Mathematica 7, аппроксимируем эту зависимость кубическим полиномом:

$$x(t) = -0.016 \cdot t^3 + 0.495 \cdot t^2 + 0.193 \cdot t. \quad (22)$$

Затем определяем зависимость потенциальной функции от времени:

$$U(t) = -0.115 \cdot t^4 - 0.495 \cdot t^3 + 0.444 \cdot t^2 + 0.191 \cdot t. \quad (23)$$

Методом средних квадратов из параметрически заданных смещения системы (22) и потенциальной функции (23), исключая время, определяем их прямую зависимость. Потенциальная функция имеет экстремумы в точках  $x_1 \approx 0.2$  (минимум – точка устойчивого равновесия) и  $x_2 \approx 4.6$  (максимум – точка неустойчивого равновесия). В таком подходе экспресс-анализ показывает, что при приближе-

нии к точке  $x_2 \approx 4.6$  система становится неустойчивой и поэтому необходимы стабилизирующие действия.

**Выводы.** Таким образом, участники экономических процессов должны внимательно следить за динамикой экономических систем, для чего необходимо создать качественную и эффективную систему мониторинга. При появлении дополнительных периодических изменений параметров систем, которые отличаются от собственных колебаний, возникает опасность резонансного увеличения амплитуды колебаний, нарушения устойчивой динамики, что может привести к глубокому кризисным явлениям. В этом случае для выхода из резонансного состояния необходимо применять действия, которые изменят собственную частоту колебаний, усилят их затухание. Экономические и административные действия, которые можно аппроксимировать кубической зависимостью от смещения системы от состояния равновесия, могут замедлить рост экономического кризиса из-за вмешательства внешних периодических действий – сил и дать время для разработки и принятия адекватных стабилизирующих действий (направленных, например, на увеличение расстройки  $\omega_0 - \omega$  и декремента затухания).

Предложенная система обработки данных мониторинга экономических параметров позволяет качественно оценить динамику системы и принять соответствующие действия для сохранения ее стабильности.

## ЛИТЕРАТУРА

- Макконел К. Р. Экономикс: принципы, проблемы и политика. / К. Р. Макконел, С. Л. Брю. [пер. с англ. 11-го изд.] – К. : Хачар-Демос, 1993. – 785 с.: табл., граф.
- Самуэльсон П. Макроэкономика: пер. с англ. / П. Самуэльсон, В. Нордгаус. – К.: Основи, 2007. – 576 с.
- Мочерний С. В. Економічна теорія : навч. посіб. / С. В. Мочерний – 4-те вид., стереотип. – К.: ВЦ «Академія», 2009. – 640 с.
- Чухно А. А. Економічна теорія [Текст] : [у 2-х т.] / А. А. Чухно, М-во фінансів України, Акад. фін. упр. – К.: [Наук. ред. від АФУ], 2010. – Т. 1. – 512 с.
- Чухно А. А. Економічна теорія [Текст] : [у 2-х т.] / А. А. Чухно, М-во фінансів України, Акад. фін. упр. – К.: [Наук. ред. від АФУ], 2010. – Т. 2. – 628 с.
- Чухно А. Сучасна фінансово-економічна криза: природа, шляхи і методи її подолання / А. Чухно // Економіка України. – 2010. – № 1. – С. 4–18.
- Чухно А. Сучасна фінансово-економічна криза: природа, шляхи і методи її подолання / А. Чухно // Економіка України. – 2010. – № 2. – С. 4–13.
- Шинкаренко Т. П. Макроекономічні шоки: теоретичні та емпіричні аспекти / Т. П. Шинкаренко // Економіка і прогнозування. – 2010. – № 2. – С. 44–60.
- Яковенко Р. В. Прикладні проблеми ринку праці / Р. В. Яковенко, А. С. Пугаченко // Наукові праці КНТУ. Економічні науки. – 2010. – Вип. 17. – 5 с.
- Федорченко В. Г. Ринок праці в Україні: аналіз стану та перспективи розвитку / В. Г. Федорченко, М. П. Денисенко, С. В. Бреус, Ю. Б. Пінчук // Ринок праці та зайнятість населення. – 2012. – 1(30). – С. 5–8.
- Кучеренко В. Р. Хвильові коливання в економіці та їх кон'юнктура / В. Р. Кучеренко // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – № 3, Т. 2. – С. 20–23.
- Пирч М. Чинники циклічних коливань в економіці України / М. Пирч // Вісник ТНЕУ. – 2011. – № 4. – С. 18–25.
- Даньків В. В. Об'єктивні причини кон'юнктурних коливань та їх наслідки впливу на ринок праці / В. В. Даньків // Науковий вісник Ужгородського університету. Економіка. – 2012. – Вип. 36. – С. 25–28.
- Кэмпбелл Р. Макконел. Экономикс: принципы, проблемы и политика. В 2 т. / Кэмпбелл Р. Макконел, Стенли Л. Брю. – М. : Издательство «Республика», 1993. – Т. 2. – 400 с.
- Колемаев В. А. Математическая экономика : учебник / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
- Одегов Ю. Г. Рынок труда (практическая макроэкономика труда): учебник / Ю. Г. Одегов, Г. Г. Руденко, Н. К. Лунева. – М. : Издательство «Альфа-Пресс», 2007. – 900 с.
- Внукова Н. Модифікація моделі М. Калецького, що описує динаміку капіталу / Н. Внукова, А. Воронін // Економіка України. – 2010. – С. 4–10.
- Roa M. J. Unemployment and economic growth cycles /M. J. Roa, F. J. Vazquez, D. Saura // Studies in nonlinear dynamics and econometrics. – 2008. – vol. 12, № 2. – Article 6.
- Lin Shu-Chin. Nonlarity between inequality fnd grows / Shu-Chin Lin, Ho-Chuan Huang, Dong-Hyeon Kim, Chih-Chuan Yeh // Studies in nonlinear dynamics and econometrics. – 2009. – vol. 13, № 2. – Art. 3.

## REFERENCES

- Butenin, N. V., Neymark, Yu. I., and Fufaev, N. A. Vvedenie v teoriuu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka, 1987.
- Chukhno, A. A. Ekonomichna teoriia [Economics]. Kyiv: Nauk. red. vid AFU, 2010.
- Chukhno, A. A. Ekonomichna teoriia [Economics]. Kyiv: Nauk. red. vid AFU, 2010.
- Chukhno, A. «Suchasna finansovo-ekonomichna kryza: pryroda, shliakhy i metody ii podalannya» [The current financial and economic crisis: nature, ways and methods podalannya]. Ekonomika Ukrainy, no. 1 (2010): 4–18.
- Chukhno, A. «Suchasna finansovo-ekonomichna kryza: pryroda, shliakhy i metody ii podalannya» [The current financial and economic crisis: nature, ways and methods podalannya]. Ekonomika Ukrainy, no. 2 (2010): 4–13.
- Dankiv, V. V. «Ob'iektyvni prychny kon'iunkturnykh kolyvan ta ikh naslidky vplyvu na rynek pratsi» [Objective reasons of short-term fluctuations and their effects on the labor market]. Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Ekonomika., no. 36 (2012): 25–28.
- Fedorchenko, V. H., Denysenko, M. P., and Breus, S. V. «Rynek pratsi v Ukraini: analiz stanu ta perspektyvy rozvytku» [The labor market in Ukraine: analysis and prospects]. Rynec pratsi ta zainiatist naseleння, no. 1(30) (2012): 5–8.
- Hordieiev, H. H. «Doslidzhennia nelineinykh modelei ekonomichnoi dynamiky» [Research modeley nonlinear economic dynamics]. Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo, no. 2(61) (2012): 133–140.
- Kucherenko, V. R. «Khvylyovi kolyvannia v ekonomitsi ta ikh kon'iunktura» [The wave fluctuations in the economy and their situation.]. Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu vol. 2, no. 3 (2009): 20–23.
- Kempbell, R. Makkonel, and Stenli, L. BriuEkonomiks: printsipy, problemy i politika. [Economics: Principles, Problems and Policies]. Moscow: Respublika, 1993.
- Kolemaev, V. A. Matematicheskaia ekonomika [Mathematical Economics]. Moscow: YuNITI, 1998.
- Koliada, Yu. V. «Fazovi ta parametrychni portrety kliuchovykh modelei nelineinoi dynamiky» [Phase and parametric portraits of key models of nonlinear dynamics]. Modeliuvannia ta informatsiini systemy v ekonomitsi, no. 82 (2010): 74–90.
- Koliada, Yu. V. «Strukturnyi portret nelineinoi ekonomichnoi dynamiky na pidgrunti matematychnoi modeli» [Portrait of nonlinear structural economic dynamics on the basis of a mathematical model.]. Modeliuvannia ta informatsiini systemy v ekonomitsi, no. 83 (2011): 151–162.
- Lapshyn, V. I., Kostenko, V. V., and Popova, O. M. «Modeliuvannia nelineinoi dynamiky hroshei, tovariv ta pratsi» [Modeling nonlinear dynamics of money, supplies and labor]. Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo, no. 5(58) (2011): 131–136.
- Lapshyn, V. I., Kostenko, E., and Kuznichenko, V. M. «Modeliuvannia dynamiky rynkiv tovariv, hroshei i pratsi v period hlobalizatsii» [Modeling the dynamics of markets for goods, money and labor in the period of globalization]. Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo, no. 3 (2012): 261–266.
- Maki, D. «Detection of stationarity in nonlinear processes: a comparison between structural breaks and three-regime TAR models» Studies in nonlinear dynamics and econometrics vol. 14, no. 4 (2010).

20. Maki Daiki. Detection of stationarity in nonlinear processes: a comparison between structural breaks and three-regime TAR models / Daiki Maki // *Studies in nonlinear dynamics and econometrics*. – 2010. – vol. 14, № 4. – Art. 3.
21. Perez Alonso A. Unemployment and hysteresis: a nonlinear unobserved components approach / A. Perez-Alonso, S. Di Sanzo // *Studies in nonlinear dynamics and econometrics*. – 2011. – vol. 15, № 1. – Art. 12.
22. Лапшин В. І. Моделювання нелінійної динаміки грошей, товарів та праці / В. І. Лапшин, В. В. Костенко, О. М. Попова // *Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право*. – 2011. – № 5 (58). – С. 131–136.
23. Лапшин В. І. Моделювання динаміки ринків товарів, грошей і праці в період глобалізації / В. І. Лапшин, Е. Костенко, В. М. Кузніченко // *Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право*. – 2012. – № 3 – С. 261–266.
24. Коляда Ю. В. Фазові та параметричні портрети ключових моделей нелінійної динаміки / Ю. В. Коляда // *Моделювання та інформаційні системи в економіці* [Електронний ресурс]: зб. наук. праць / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Київ. нац. ун-т ім. В. Гетьмана»; відп. ред. В. Галіцин. – 2010. – Вип. 82. – С. 74–90.
25. Коляда Ю. В. Структурний портрет нелінійної економічної динаміки на підґрунті математичної моделі / Ю. В. Коляда // *Моделювання та інформаційні системи в економіці* [Електронний ресурс]: зб. наук. праць / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Київ. нац. ун-т ім. В. Гетьмана»; відп. ред. В. Галіцин. – 2011. – Вип. 83. – С. 151–162.
26. Гордєєв Г. Г. Дослідження нелінійних моделей економічної динаміки / Г. Г. Гордєєв // *Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право*. – 2012. – № 2(61). – С. 133–140.
27. Бутенин Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний: учеб. пособ. для вузов / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 384 с.
28. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 368 с.
- Mochernyi, S. V. *Ekonomichna teoriia* [Economics]. Kyiv: Akademiia, 2009.
- Makkonel, K. R., and Briu, S. L. *Ekonomiks: printsipy, problemy i politika*. [Economics: Principles, Problems and Policies]. Kyiv: Khachar-Demos, 1993.
- Odegov, Yu. G., Rudenko, G. G., and Luneva, N. K. *Rynok truda (prakticheskaia makroekonomika truda)* [Labour market (practical macroeconomics of labor)]. Moscow: Alfa-Press, 2007.
- Perez-Alonso, A., and Di Sanzo, S. «Unemployment and hysteresis: a nonlinear unobserved components approach» *Studies in nonlinear dynamics and econometrics* vol. 15, no. 1 (2011).
- Pyrch, M. «Chynnyky tsyklichnykh kolyvan v ekonomitsi Ukrainy» [Factors cyclical fluctuations in the economy of Ukraine]. *Visnyk TNEU*, no. 4 (2011): 18–25.
- Roa, M. J., Vazquez, F. J., and Saura, D. «Unemployment and economic growth cycles» *Studies in nonlinear dynamics and econometrics* vol. 12, no. 2 (2008).
- Shu-Chin., Lin, Ho-Chuan., Huang, and Dong-Hyeon., Kim «Nonlinearity between inequality and growth» *Studies in nonlinear dynamics and econometrics* vol. 13, no. 2 (2009).
- Samuelson, P., and Nordhaus, V. *Makroekonomika* [Macroeconomics]. Kyiv: Osnovi, 2007.
- Shynkarenko, T. P. «Makroekonomichni shoky: teoretychni ta empirychni aspekty» [Macroeconomic shocks: theoretical and empirical aspects]. *Ekonomika i prohnozuvannia*, no. 2 (2010): 44–60.
- Vnukova, N., and Voronin, A. «Modyfikatsiia modeli M. Kaletskoho, shcho opysuie dynamiku kapitalu» [Modification M. Kaletskoho model describing the dynamics of capital]. *Ekonomika Ukrainy* (2010): 4–10.
- Yakovenko, R. V., and Puhachenko, A. S. «Prykladni problemy rynku pratsi» [Applied problems of the labor market]. *Naukovi pratsi KNTU. Ekonomichni nauky*, no. 17 (2010): 5-.
- Zaslavskiy, G. M., and Sagdeev, R. Z. *Vvedenie v nelineynuiu fiziku: Ot maiatnika do turbulentnosti i khaosa* [Introduction to Nonlinear Physics: From the pendulum to turbulence and chaos]. Moscow: Nauka, 1988.